

# OVER KNIK VAN GEKOPPELDE STAVEN

*Bij gekoppelde staven met een gering aantal velden blijkt de stijfheid van de eindkoppelplaat van overwegende invloed te zijn op de totale knikkracht.*

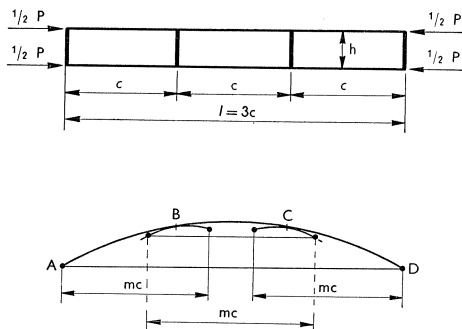


Fig. 1

Bij de beproeving op knik van een serie gekoppelde houten staven, deden zich verschijnselen voor, die om een nadere verklaring vroegen. Zij waren aanleiding tot het opstellen van berekeningen over de invloed van de stijfheid van de koppelplaten op de knikkracht bij korte staven, die uit drie velden bestaan (fig. 1). In het volgende wordt in het kort op de wijze van berekening ingegaan en worden een tweetal sprekende voorbeelden behandeld.

De berekening van de knikvoorwaarde voor een gekoppelde staaf is uitvoerig behandeld in het rapport StI — 9 — 4022. De staaf wordt daarbij opgevat als een Vierendeelligger met evenwijdige randen. De vormveranderingstoestanden van de afzonderlijke staafgedeelten worden eerst veldsgewijze met behulp van de differentiaalvergelijking van de elastische lijn bepaald, waarna in de knooppunten deze staafgedeelten en de koppelplaten

worden aangesloten, wat aanleiding geeft tot het opstellen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Door hun regelmatige opbouw zijn zij door twee simultane differentievergelijkingen van de tweede orde te vervangen.

A. Voor het geval, dat de eindkoppelplaat de halve stijfheid bezit van de overige, kan, bij een willekeurig aantal velden, een exacte knikvoorwaarde worden opgesteld, welke luidt:

## Notaties:

$l$	totale lengte van de staaf
$c$	veldlengte
$n$	aantal velden, dus $l = nc$
$h$	afstand tussen de staafassen van de enkele profielen
$m$	coëfficiënt van virtuele kniklengte
$mc$	virtuele kniklengte van de staaf
$F_e$	doorsnede van het enkele profiel
$I_e$	traagheidsmoment van het enkele profiel t.o.v. de beschouwde knikrichting
$i_e$	traagheidsstraal van het enkele profiel
$I_k$	traagheidsmoment van de koppelplaat in de beschouwde vervormingsrichting

$$\bar{\zeta} = \frac{\frac{h^2}{2i_e^2}}{1 - \frac{E\tau F_e h^2 Bx}{4c}} = \frac{2 \frac{\pi}{m} \left[ \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{m} \right]}{\sin \frac{\pi}{m} \left[ 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right]} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{waarin } x = 2 \left( \cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) \text{ en } B = \frac{h}{6EI_k} \dots \dots \dots (2)$$

Uit deze voorwaarde dient men  $m$  op te lossen.

Voor  $n = 3$  is in de tabel 1 op blz. 61 het verband tussen  $\bar{\zeta}$  en  $m$  gegeven, waaruit bij gegeven  $\bar{\zeta}$  de bijbehorende waarde van  $m$  is af te lezen. Voor andere waarden van  $n$  zij naar de tabellen in het reeds genoemde rapport verwezen.

Hierna kan de totale knikkracht worden bepaald met behulp van de formule

$$P = 2 \frac{\pi^2 E\tau I_e}{m^2 c^2} \dots \dots \dots (3)$$

Bovenstaande formules gelden zowel voor het elastische als voor het niet-elastische gebied. In het lineair-elastische gebied geldt  $\tau = 1$ .

B. Voor het geval dat de eindkoppelplaten oneindig stijf worden gedacht luidt voor  $n = 3$  de symmetrische knikvoorwaarde:

$$\zeta^2 - [A + D] \zeta + [AD + BC] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Hierin is:  $A = \frac{1 - 3 \cos \frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{m}}$   $B = \frac{3a - 1 + \cos \frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{m}}$

$$C = \frac{2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{m} \right)}{\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}} \quad D = \frac{2 \left( 1 + \cos \frac{\pi}{m} \right) + 3a \left( 1 + 2 \cos \frac{\pi}{m} \right)}{\frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}} \dots \dots (5)$$

$$\text{en } \zeta = \frac{h^2}{2i_e^2} \quad \text{terwijl } a = \frac{E\tau}{36E} \cdot \frac{F_e \cdot h^3}{I_k \cdot c} \dots \dots \dots (6)$$

### Rekenvoorbeeld.

We kiezen hiervoor een wat extreem voorbeeld, waar het verschil in knikkracht sterk tot uiting komt. We beschouwen een staaf bestaande uit twee  $\square 20$ , op een afstand  $h = 30$  cm uit elkaar. De totale lengte is 900 cm, bestaande uit drie velden van 300 cm. Van het gekozen profiel is  $i_e = 2,14$  cm en  $F_e = 38,2$  cm<sup>2</sup>. We koppelen nu de staaf op twee manieren, overeenkomend met de reeds onderscheiden gevallen A en B (fig. 2):

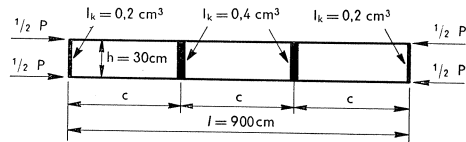


Fig. 2A

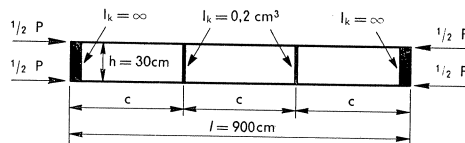


Fig. 2B

- A. Twee sterk verende (slappe) dubbele eindkoppelingen met een  $I_k = 0,2$  cm<sup>3</sup> en twee dubbele middenkoppelingen elk met een tweemaal zo groot traagheidsmoment, dus  $I_k = 0,4$  cm<sup>3</sup>.
- B. Twee oneindig stijve dubbele eindkoppelingen en twee dubbele middenkoppelingen met een  $I_k = 0,2$  cm<sup>3</sup>.

In beide gevallen hebben we zuiver elastische knik, dus  $\tau = 1$ .

$$\text{Berekening geval A: } x = 2 \left( \cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) = -1$$

$$\frac{E \cdot F_e \cdot h^2 \cdot Bx}{4c} = \frac{E \cdot F_e \cdot h^3 \cdot x}{24c EI_k} = \frac{F_e \cdot h^3 \cdot x}{24c I_k} = = - \frac{38,2 \cdot 30^3 \cdot 1}{24 \cdot 300 \cdot 0,4} = -358$$

$$\text{Dus } \bar{\zeta} = \frac{30^2}{1 + 358} = \frac{2 \cdot 2,14^2}{1 + 358} = 0,274.$$

In tabel 1 vindt men de corresponderende waarde van  $m = 2,833$ . Voor de totale knikkracht vinden we dus:

$$P = 2 \frac{\pi^2 EI_e}{2,833^2 c^2} = 0,249 \frac{\pi^2 EI_e}{c^2}$$

Tabel 1.

Geval A, $n = 3$	
$\bar{\zeta}$	$m$
$\infty$	1,00
59	1,10
29	1,20
18	1,30
12,9	1,40
9,67	1,50
7,51	1,60
5,95	1,70
4,78	1,80
3,87	1,90
3,14	2,00
2,55	2,10
2,06	2,20
1,65	2,30
1,31	2,40
1,01	2,50
0,75	2,60
0,53	2,70
0,33	2,80
0,16	2,90
0,00	3,00

Tabel 2.

Geval B, $n = 3$ $a = 480$	
$\bar{\zeta}$	$m$
$\infty$	1,00
98,3	1,043
79,2	1,05
38,4	1,10
16,93	1,20
8,15	1,30
0,53	1,40

$$\text{Berekening geval B: } a = \frac{38,2 \cdot 30^3}{36 \cdot 0,2 \cdot 300} = 480.$$

De knikvoorwaarde moet dus voor deze waarde van  $a$  nader worden uitgewerkt. In tabel 2 is voor dit geval en voor  $n = 3$  het verband tussen  $\bar{\zeta}$  en  $m$  gegeven. (Slechts één van de beide wortels  $\bar{\zeta}$  uit de kwadratische vergelijking is bruikbaar).

$$\text{We vinden } \bar{\zeta} = \frac{30^2}{2 \cdot 2,14^2} = 98,3. \text{ Hierbij behoort de}$$

waarde  $m = 1,043$ , zodat we voor de totale knikkracht vinden

$$P = 2 \frac{\pi^2 EI_c}{1,043^2 \cdot c^2} = 1,838 \frac{\pi^2 EI_c}{c^2}.$$

De knikkracht in geval B blijkt dus ruim 7 maal die uit geval A te bedragen; de virtuele kniklengte bedraagt in geval A ongeveer 2,72 maal die uit geval B. Duidelijk blijkt dus de grote invloed van de stijfheid van de eindkoppelingen op de totale knikkracht. Het verschijnsel is analoog aan dat van samengestelde liggers, verbonden door bijvoorbeeld kramplaten, die op buiging worden belast en waarbij de verbindingen aan het einde ook de belangrijkste rol spelen (fig. 3).

In de praktijk zullen de tussenkoppelingen in de regel ook stijf worden uitgevoerd. Het is begrijpelijk dat de hierboven berekende geprononceerde verschillen dan sterk gereduceerd zullen worden.

Bij langere staven met meer velden zal dit eveneens het geval zijn.

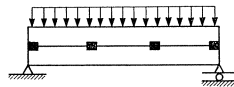


Fig. 3