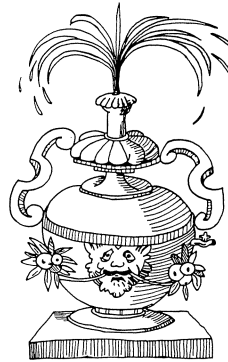


De Heronsfontein

13.

Mededelingen over vondsten en ideeën waarin het verrassende element iets gemeen heeft met de speelse vindingen van Heron van Alexandrië, naar wie dit tijdschrift genoemd is.



In 1678 publiceerde Robert Hooke in *Lectures de Potentia Restitutiva or of Spring* bewijsmateriaal voor zijn stelling *ut tensio sic vis*, die hij twee jaar tevoren door middel van een anagram ('ceiinossttuu') al voorlopig aangekondigd en als zijn geestelijk eigendom geclaimd had. Enige door hem ter illustratie aangevoerde proeven betreffen de uitrekking van een draad en van een schroefveer, de verdraaiing van een spiraalveer en de zakking van het uiteinde van een ingeklemde balk.

Het optreden van lineair mechanisch gedrag van een constructie wordt in de tegenwoordige zienswijze afhankelijk gesteld van drie voorwaarden:

1. lineair verband tussen de uitwendige belasting en de inwendige spanningen,
2. lineair verband tussen spanningen en rekken, wat in engere zin als 'wet van Hooke' wordt aangeduid,
3. lineair verband tussen rekken en verplaatsingen.

Het hangt van het onderzochte geval af, welke van de drie voorwaarden bij opvoeren van de belasting het eerst zijn geldigheid in ernstige mate gaat verliezen. Bij veren is het mogelijk dat de afmetingsverhoudingen reeds aanzienlijk veranderd zijn bij een belasting die nog slechts kleine spanningen en specifieke rekken veroorzaakt; zodat aan de tweede voorwaarde nog voldaan is, terwijl de beide andere hun geldigheid reeds verloren hebben.

Als voorbeeld*) wordt beschouwd een schroefveer gevormd door een draad ter lengte s die (volgens een schroeflijn) n_0 maal gewikkeld is volgens een cirkelcilinder met straal r_0 . De stijging (hellingshoek t.o.v. het vlak \perp de cilinderas) heeft aanvankelijk de waarde α_0 .

Aan de uiteinden zijn voorzieningen aangebracht die het mogelijk maken de veer met een kracht F volgens de cilinderas uit te rekken. De uitrekking van de veer wordt f genoemd; daarnaast wordt beschouwd de verandering van het aantal windingen bij deformatie. Als dit aantal tot n toeneemt (niet noodzakelijk een geheel getal) kan een rotatiecomponent $\theta = 2\pi(n - n_0)$ van de uiteinden worden waargenomen.

*) Bij het samenstellen van deze Heronsfontein werd onder meer geput uit de bijdrage van prof. ir. A. van Wijngaarden in „Anniversary volume on applied mechanics, dedicated to C. B. Biezeno”, uitg. Stam 1953, blz. 214-222, en een mondelinge mededeling van ir. J. Stroband.

Volgens de lineaire theorie is:

$$f = Fr_0^2 \cdot s \left(\frac{\cos^2 \alpha_0}{GI_w} + \frac{\sin^2 \alpha_0}{EI} \right)$$

$$\theta = Fr_0^2 \cdot 2\pi n_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{1}{GI_w} - \frac{1}{EI} \right)$$

Hierbij is GI_w de wringingsstijfheid van de draaddoorsnede en EI de stijfheid tegen buiging in de richting van de normaal (de straal van de cilinder). Indien de draaddoorsnede cirkelvormig is, en het materiaal een dwarscontractiecoëfficiënt 0,3 heeft, geldt $EI = 1,3 GI_w$. De factor tussen haakjes in de uitdrukking voor θ is dan positief, hetgeen inhoudt dat het aantal windingen bij het eerste opbrengen van belasting groter zal worden.

De vormverandering door normaal- en dwarskrachten is verwaarloosd; de ontwikkelde lengte heeft de oorspronkelijke waarde S behouden. In belaste toestand heeft de gedeformeerde veer nog altijd de vorm van een schroeflijn, de stijging is toegenomen en de straal (van de cilinder) is in het algemeen kleiner geworden. De hoek θ die als maat voor de verandering van het aantal windingen gekozen is, voldoet ook in het niet-lineaire gebied aan de volgende eenvoudige betrekking:

$$\theta = s \left(\frac{\cos \alpha}{r} - \frac{\cos \alpha_0}{r_0} \right)$$

De vergroting van de stijging van α_0 tot α heeft een verkleining van de cosinus tot gevolg; bij de hier beschouwde afmetingsverhoudingen neemt r aanvankelijk nog sterker af, zodat de waarde der eerste breuk tussen de haken toeneemt ten opzichte van de tweede en θ positief wordt. Bij steeds verder toenemende belasting worden de rollen echter spoedig omgekeerd en zal het aantal windingen afnemen.

De formules van het in de voetnoot genoemde artikel maken het mogelijk dit effect kwantitatief weer te geven. De uitkomsten voor een enkel geval zijn in grafiek gebracht. De waarde van de uitrekking neemt niet evenredig met de belasting toe, maar toch is de afwijking van lineair gedrag niet zeer uitgesproken: bij het eind van de grafiek is de uitrekking 25% minder dan de uit de lineaire theorie verwachte waarde. Voor wat betreft het aantal windingen is een veel opvallender niet-lineariteit te constateren. De hiervoor bepalende rotatiecomponent is aanvankelijk positief, zoals voor deze gegevens volgens de lineaire theorie te verwachten is. Na het bereiken van een maximumwaarde keert θ terug tot nul om vervolgens negatief te worden en te blijven, daarbij in absolute waarde het eerdere positieve maximum steeds meer in de schaduw stellende. Uit globale waarneming zal daarom de indruk kunnen ontstaan, dat alleen vermindering van het aantal windingen optreedt als een schroefveer wordt belast.

