

# De Heronsfontein

## 12.

Mededelingen over vondsten en ideeën waarin het verrassende element iets gemeen heeft met de speelse vindingen van Heron van Alexandrië, naar wie dit tijdschrift genoemd is.



Het hier volgende mechanicavraagstuk biedt geen principiële moeilijkheden, indien men het volgens standaardmethoden oplost. Het rekenwerk blijkt dan echter omvangrijk te worden; het is daarom interessant na te gaan wat de kortste weg naar het eindresultaat is. De probleemstelling dankt de redactie aan een lezer met ervaring op het gebied van de berekening van hoge gebouwen, waarbij zich – zij het op enigszins andere leest geschoeid – analoge aspecten voordoen.

De omschrijving van de opgave luidt: Twee even lange parallelle prismatische balken van gelijke buigingsstijfheid zijn onderling verbonden door een groot aantal pendelstijlen, die elk als  $\infty$  stijf tegen normaalkracht (trek dan wel druk) worden beschouwd. Eén der balken (AB) is aan zijn einden volledig ingeklemd, de andere balk (CD) heeft vrije uiteinden. Boven een der pendelstijlen rust een last  $P$  op balk AB (zie fig. 1).

Gevraagd: hoe werken de beide balken samen onder de gegeven belasting.

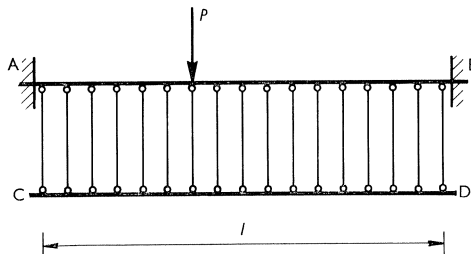


Fig. 1.

Voor het uitwerken van de oplossing kan de volgende redenering dienen.

Beschouw in eerste instantie ook de balk CD als ingeklemd aan zijn einden, zodat AB en CD, als geheel gelijkwaardige systeemdelen, elk de helft van de werking van de belasting  $P$  ondervinden. De momentenverdeling is dan eenvoudig te berekenen; indien bijvoorbeeld het belaste punt de overspanning

in de verhouding 3 : 5 verdeelt, heerst bij A en bij C een moment  $-0,0732Pl$  terwijl bij B en bij D een moment  $-0,0439Pl$  aanwezig is.

Brengt men nu, om de randvoorwaarden te vervullen, bij C zowel als D een moment aan *tegengesteld* aan het aldaar in eerste instantie veronderstelde, dan zal de daarbij behorende momentenverdeling nog bij de eerder genoemde gesuperponeerd moeten worden.

De bijkomende momentenverdeling zal vooreerst benaderend worden bepaald, uitgaande van de veronderstelling dat de 'veldlengte' d.w.z. de afstand tussen de pendelstijlen zeer klein is. De balk CD kan dan beschouwd worden als een ligger op (vele) *starre* steunpunten; de ingeklemde balk AB ondersteunt via de pendelstijlen balk CD.

De voortplanting van een aangebracht eindmoment over een balk met on-  
 eindig vele starre steunpunten verloopt als een opvolging van alternerende  
 overgangsmomenten ter plaatse van die steunpunten, en wel van een uiteinde

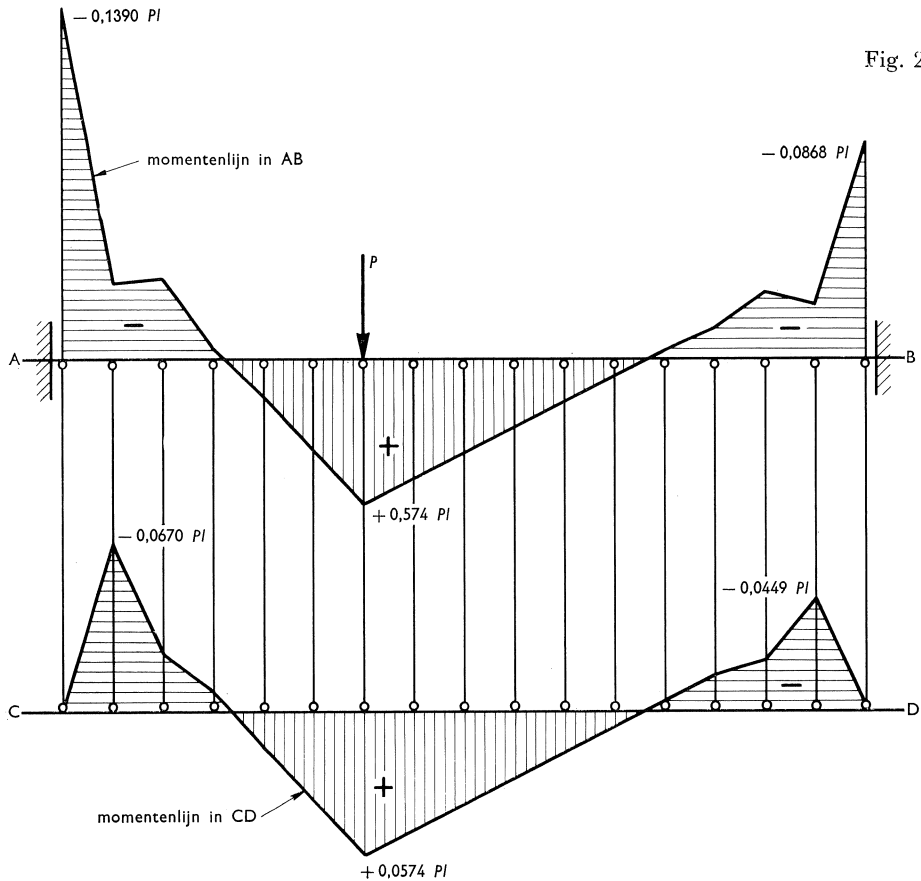


Fig. 2.

af volgens een meetkundige reeks met reden  $-(2-\sqrt{3})$  ofwel  $-0,268$ . De eerste 5 termen van deze reeks zijn mitsdien:

$$1 ; -0,268 ; +0,0716 ; -0,0185 ; +0,0024$$

De bijkomende momentenverdeling in CD is nu uit te werken. Bij C wordt het moment  $(-0,0732+0,0732)Pl = 0$  zoals volgens de randvoorwaarde behoort. Bij de eerstvolgende pendelstijl zal het primaire moment nog ongeveer  $-0,0732Pl$  bedragen als de veldlengte inderdaad zeer klein is; bijkomend is daar  $-0,268 \times 0,732Pl$  zodat totaal  $-0,0928Pl$  als buigend moment aldaar optreedt. In de balk AB zullen voorts de bijkomende momenten de tegengestelde waarden hebben van die in CD, althans bij genoemde benadering, bij A vindt men daarom een dubbel zo groot moment als daar in de primaire toestand aanwezig was.

Over een nauwkeuriger berekening zal hier niet uitvoerig worden gesproken. Het principe volgens welk de momenten in fig. 2 zijn berekend, zal echter kort worden aangeduid. Bij A en B zijn scharnieren gedacht ter verkrijging van een weliswaar niet statisch bepaald, maar niettemin eenvoudig door te rekenen hoofdsysteem. Te superponeren krachtsverdelingen betreffen onder meer, dat bij A en C hetzelfde uitwendig moment aangrijpt, en een geval waarbij de uitwendige momenten bij A en C juist elkaars tegengestelde zijn. In het laatstgenoemde geval is de berekening van de balken als op vele punten star opgelegde liggers volledig correct, zoals uit de symmetrie van het geheel volgt. Door nu ook soortgelijke basisgevallen voor momenten bij het rechter uiteinde op te stellen, is het mogelijk door geëigende superpositie van een en ander te bereiken dat de helling bij A en B, en het moment bij C en D nul worden. De geschetste berekening is uitgevoerd voor het geval dat de overspanning in 16 'velden' verdeeld is.

Voor het moment in CD bij de na C eerstvolgende pendelstijl wordt gevonden  $-0,0670Pl$ , en voor het inklemmingsmoment bij A de waarde  $-0,1390Pl$ . De conclusie die uit de benaderingsberekening en ietwat beter gefundeerd uit de exacte berekening volgt, is dat de balken in de nabijheid van de inklemming tezamen aanmerkelijk zwaarder moeten worden gedimensioneerd dan het geval zou zijn als beide balken ingeklemd waren.