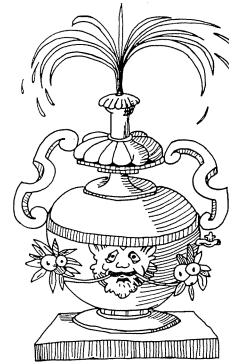


# De Heronsfontein

## 5.

Mededelingen over vondsten en ideeën waarin het verrassende element iets gemeen heeft met de speelse vindingen van Heron van Alexandrië, naar wie dit tijdschrift genoemd is.



In de vorige aflevering van de Heronsfontein is een paradox behandeld die voorkomt in de theorie der buigingsstijve platen. Hierdoor is wellicht de indruk gewekt, dat bij de berekening van elementaire constructies dergelijke moeilijkheden niet voor zouden komen. Het navolgende probleem betreffende de krachtsverdeling in een cirkelvormige ring, waarop door ir. W. NIJENHUIS de aandacht werd gevestigd, is zo'n voorbeeld van eenvoud, „die niet eenvoudig is”!

Beschouwd wordt een gesloten horizontale cirkelvormige ring, vrij opgelegd op  $n$  steunpunten en belast door een gelijkmatig verdeelde, verticaal gerichte

belasting  $q$ . De dwarsdoorsnede is overal dezelfde; de werklijn van zowel de belasting als de oplegreactie van de steunpunten snijdt de cirkel, gevormd door de zwaartepunten van de doorsneden. De straal van deze cirkel is  $R$ ; de steunpunten staan op onderling gelijke afstanden  $L = 2\pi R/n$  (langs de boog gemeten). De bijbehorende middelpuntshoek is  $2\vartheta_0$  zodat  $\vartheta_0 = \pi/n$  (zie fig. 1).

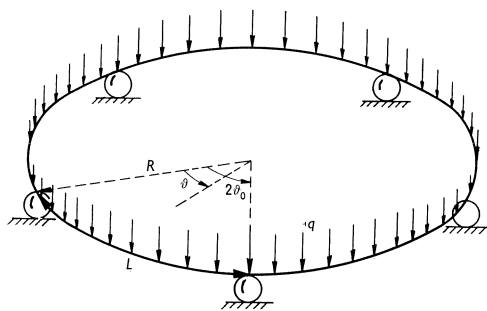


Fig. 1.

Hoewel de constructie statisch onbepaald is, kan dank zij het aanwezige aantal symmetrie-assen de krachtsverdeling voor een groot deel gevonden worden zonder van expliciet uitgeschreven vormveranderingsvergelijkingen gebruik te maken. Onder meer is dit het geval met het buigende moment  $M_b$  om de horizontale as en het wringende moment  $M_w$  (fig. 2). Het verloop van deze momenten over het veld tussen twee opleggingen wordt gegeven door de volgende formules, waarbij de poolhoek  $\vartheta$  van 0 tot  $2\vartheta_0$  als lopende coördinaat is ingevoerd.

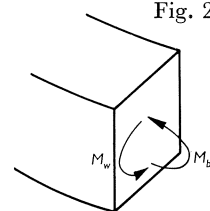


Fig. 2.

$$M_b = 1/4qL^2 \frac{\vartheta_0 \cos(\vartheta_0 - \vartheta) - \sin \vartheta_0}{\vartheta_0^2 \sin \vartheta_0}$$

$$M_w = 1/4qL^2 \frac{(\vartheta_0 - \vartheta) \sin \vartheta_0 - \vartheta_0 \sin(\vartheta_0 - \vartheta)}{\vartheta_0^2 \sin \vartheta_0}$$

Bij de afleiding van deze formules is gebruik gemaakt van het feit, dat  $M_w$  in de symmetrie-doorsneden  $\vartheta = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\vartheta = 2\vartheta_0$  nul moet zijn. Ook is voldaan aan het moment-evenwicht om de raaklijn aan de horizontale ring-as, uitgedrukt door de vergelijking:

$$\frac{dM_w}{d\vartheta} = M_b$$

De grootte van  $M_b$  ter plaatse van een steunpunt en in het veldmid-den voor verschillende waarden van  $\vartheta_0$  is door ir. NIJENHUIS nader berekend. De gevonden resultaten zijn grafisch voorgesteld in fig. 3. Opvallend is het limietgedrag voor het geval dat het aantal velden zeer groot wordt en derhalve  $\vartheta_0$  tot nul nadert (hierbij is de veldlengte  $L$  constant gehouden, zodat de straal  $R$  onbegrensd toeneemt). Voor steunpunts- resp. veldmoment wordt dan  $-1/12qL^2$  en  $+1/24qL^2$  gevonden. Dit zijn dezelfde uitkomsten als bij de rechte prismatische ligger over vele steunpunten; men is echter niet gewend deze te vinden zonder van *vormveranderingsvergelijkingen* gebruik te maken!

Wat hier nu in feite is gebeurd is het volgende. Omdat het wringende moment ter plaatse van de steunpunten nul moet zijn, is de integraal van het buigende moment nul:

$$\int_0^{2\vartheta_0} M_b d\vartheta = \int_0^{2\vartheta_0} \frac{dM_w}{d\vartheta} d\vartheta = 0$$

Bij de rechte prismatische ligger over vele steunpunten is een overeenkomstige integraal nul, dan evenwel op grond van de vormveranderingsvoorwaarde dat de doorsneden boven de steunpunten verticaal (en dus onderling evenwijdig) moeten blijven.

$$\int \frac{M_b}{EI} dx = 0$$

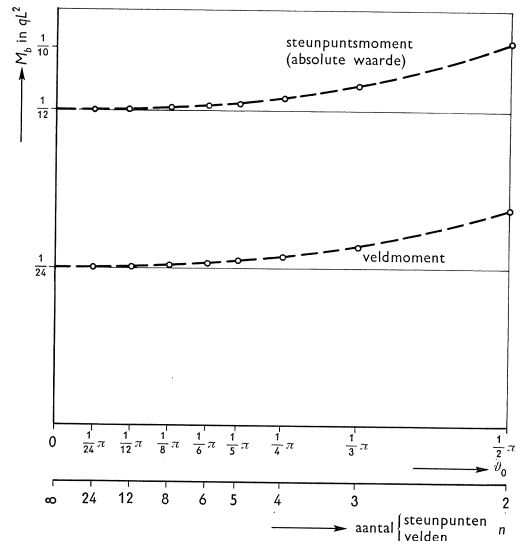


Fig. 3.

Het resultaat is nu slechts toevallig hetzelfde als bij de cirkelvormige ring, omdat de buigingsstijfheid ( $EI$ ) constant is.

Hiermede is men dan op een paradox van bijzondere diepgang gestuit. Het voor de cirkelvormige ring afgeleide resultaat is uitsluitend gebaseerd op de evenwichtsvergelijkingen en een aantal symmetrievorwaarden; het zou derhalve geldig moeten blijven voor een ring van variërende doorsnede (stijfheid) mits aan de symmetrie voldaan blijft. Het steunpuntsmoment zou voor kleine  $\vartheta_0$  ook dan nog altijd tot  $-^{1/12}qL^2$  naderen, wat evenwel strijdig is met het resultaat van de rechte ligger op vele steunpunten en analoog variërend doorsnedeverloop!

Daar het intuïtief duidelijk is, dat de uitkomst voor de rechte ligger de juiste waarde van de limiet moet zijn, zal men met de voorgaande uitspraak geen genoegen willen nemen. Als concreet onderwerp van nadere bestudering neme men een balk, waarbij in het midden van de velden over een lengte  $^{1/2}L$  de buigingsstijfheid  $^{1/2}EI_0$  is, terwijl van de gedeelten boven de steunpunten de buigingsstijfheid  $EI_0$  is. Voor de rechte balk is dan een waarde van het steunpuntsmoment  $= -^{1/12}qL^2$  uitgesloten, omdat daarbij boven het steunpunt een gaping  $\varphi$  zou ontstaan ter grootte:

$$\varphi = \frac{qL^3}{64EI_0}$$

Bij de rechte doorgaande balk is deze gaping alleen op te heffen door een wijziging van de momentenverdeling.

Bij de cirkelvormige ring, eveneens met verspringende  $EI$ -waarden als bij de rechte balk, kan de gaping echter ook gesloten worden door een kanteling van alle doorsneden over een hoek

$$\chi = \frac{\varphi R}{L} = \frac{\varphi}{2\vartheta_0}$$

Voor de ring kan aldus de uit evenwicht en symmetrie gevonden momentenverdeling in het evenbedoelde geval ongewijzigd gehandhaafd blijven. Evenwel behoort bij zeer kleine waarden van  $\vartheta_0$  een relatief grote benodigde kanteling  $\chi$ , en in dit geval zijn de methoden van de lineaire mechanica bepaald niet meer geldig. De evenwichtsvorwaarden moeten daarentegen worden opgesteld voor de *vervormde* constructie. Alleen langs deze weg zou het juiste inzicht in het gedrag van de constructie bij de limiet-overgang naar de rechte balk te verkrijgen zijn. In het bestek van de „Heronsfontein” wordt hier echter niet verder op ingegaan.